



Departamento de Física
Universidade Federal de Pernambuco

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2016

Eletrodinâmica Clássica

09/08/2016 – 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

Questão 1: Eletrostática

Uma esfera de raio R com centro na origem é constituída por um meio linear, homogêneo, isotrópico, de permissividade elétrica ϵ . O meio encontra-se polarizado, com vetor polarização uniforme e constante ao longo do eixo z , ou seja, $\vec{P} = P\hat{z}$. Não existem cargas livres no interior da esfera, isto é, $\rho_\ell = 0$ em $r < R$.

- (a) (20%) Calcule a densidade superficial de cargas de polarização σ_P na superfície $r = R$.
- (b) (30%) A equação de Laplace para o potencial eletrostático é válida na região $r < R$? Justifique.
- (c) (50%) Calcule o potencial eletrostático Φ em todo o espaço.

Dados:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} [A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-(\ell+1)}] P_\ell(\cos \theta),$$
$$P_{\ell=1}(\cos \theta) = \cos \theta,$$
$$\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell, \ell'}.$$

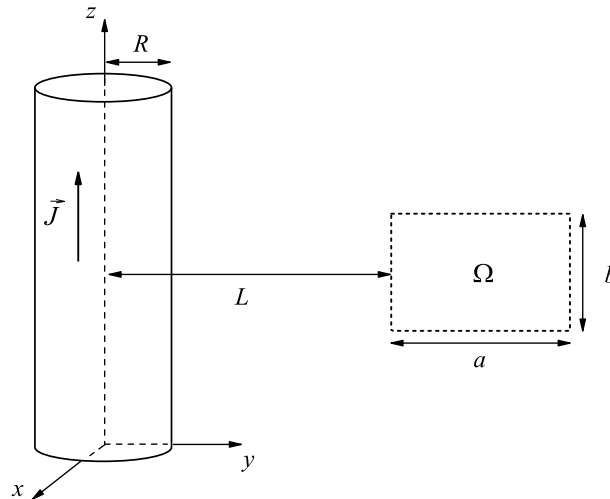
Questão 2: Magnetostática e Lei de Faraday

Um fio condutor retilíneo infinitamente longo, com seção circular de raio R , transporta uma corrente elétrica constante não uniforme. O eixo do fio coincide com o eixo z , de modo que o vetor densidade de corrente é dado, em coordenadas cilíndricas, por

$$\vec{J} = \frac{3I_0}{\pi R^3}(R - \rho)\hat{z},$$

onde I_0 é uma constante e ρ é a coordenada radial.

- (a) (40%) Calcule o vetor indução magnética \vec{B} a uma distância ρ do eixo do fio, para $\rho > R$.
- (b) (30%) Considere uma região Ω retangular no plano yz , de lados a e b , como mostra a figura abaixo. Os lados de comprimento b são paralelos ao fio. O mais próximo deles está a uma distância $L > R$ do eixo z . Calcule o fluxo do vetor \vec{B} obtido em (a) através da região Ω .



- (c) (30%) Suponha que a borda da região Ω na figura acima representa uma espira retangular de lados a e b . A espira tem resistência elétrica r . Suponha ainda que qualquer movimento da espira não altera o campo \vec{B} calculado em (a). Determine a corrente elétrica induzida na espira quando ela se desloca com velocidade \vec{v} constante nos seguintes casos: (i) $\vec{v} = v\hat{z}$ e (ii) $\vec{v} = v\hat{y}$, onde $v > 0$. Indique o sentido de circulação da corrente induzida em cada caso, justificando sua resposta.

Questão 3: Equações de Maxwell

No Sistema Internacional, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$(I) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho; \quad (II) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (III) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (IV) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

- (a) (30%) Partindo das equações acima, deduza as duas equações diferenciais acopladas para o potencial elétrico $\Phi(\vec{r}, t)$ e para o vetor potencial magnético $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

$$\text{Dado: } \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}.$$

- (b) (20%) Sejam $\square^2 = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ e $\Psi = \nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Encontre expressões para

$$K(\vec{r}, t) = \square^2 \Phi + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{\Gamma}(\vec{r}, t) = \square^2 \vec{A} - \nabla \Psi$$

em termos de ρ e \vec{J} .

- (c) (30%) Mostre que os potenciais (Φ_1, \vec{A}_1) e os potenciais (Φ_2, \vec{A}_2) produzem os mesmos campos \vec{E} e \vec{B} se

$$\Phi_2 = \Phi_1 - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \nabla f,$$

onde $f(\vec{r}, t)$ é uma função escalar arbitrária.

- (d) (20%) A arbitrariedade de $f(\vec{r}, t)$ no item (c) nos permite escolher o par (Φ, \vec{A}) *calibrando* o divergente de \vec{A} . Tendo em vista as equações diferenciais para os potenciais deduzidas no item (a), discuta as vantagens ao se considerar, por exemplo, (i) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e (ii) $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

Questão 4: Ondas Eletromagnéticas

- (a) (25%) Escreva as equações de Maxwell na forma diferencial para os campos \vec{E} e \vec{B} para um meio condutor linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ϵ e permeabilidade magnética μ . Suponha que neste meio não há densidade volumétrica de cargas livres ($\rho_\ell = 0$) e que existe uma densidade de corrente livre \vec{J}_ℓ .
- (b) (25%) Utilizando a lei de Ohm, $\vec{J}_\ell = \sigma \vec{E}$, onde σ é a condutividade elétrica, mostre que para o campo \vec{E} devemos ter que

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

Dado: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$.

- (c) (25%) Para a equação de onda do item (b), considere solução do tipo onda plana se propagando ao longo da direção x , ou seja,

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp[i(kx - \omega t)].$$

Mostre que k^2 é um número complexo, determinando as suas partes real e imaginária em termos de ϵ , μ , σ e ω .

- (d) (25%) No caso de um bom condutor ($\sigma \gg \epsilon\omega$), obtenha o *comprimento de penetração* (*skin depth*) do material, ou seja, a distância para a qual a amplitude da onda eletromagnética é reduzida por um fator de $1/e$. Sugestão: Escreva k na forma complexa $k = k_R + ik_I$, onde k_R e k_I são reais.